INTEGRALES GÉNÉRALISÉES



Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

1

On considère la fonction réelle de la variable réelle $F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

1) Déterminer ~~le domaine~~ l'ensemble de définition D de F.

2) Montrer que F est strictement décroissante sur D. *(On pourra, par exemple, revenir à la définition d'une fonction strictement décroissante.)*

3) A l'aide d'une majoration simple, déterminer la limite de F en $+\infty$.

4) On se propose d'étudier le comportement de F au voisinage de 0^+.

a) Soit $A > 0$.

Montrer que : $\forall u \geq 0,\ -u \leq e^{-u} - 1 \leq 0$.

En déduire que $\lim_{x \to 0^+} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Retrouver ce résultat en appliquant un théorème sur les intégrales dépendant d'un paramètre.

b) Montrer que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = +\infty$.

c) En déduire la limite de F en 0^+.

(Exercice proposé par Allison Krieger le 6/10/07 par mail - mégamathsème 2)

1) • Si $x > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t e^{-xt} = 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T > 0 \quad t > T \Rightarrow e^{-xt} < \frac{\varepsilon}{t}$$

et $\int_T^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \varepsilon \int_T^A \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$

Comme $\int_T^A \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ converge quand $A \to +\infty$ (puisque $\int_T^A \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \leq \int_T^A \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_T^A \frac{1}{t^2} dt$ converge quand $A \to +\infty$), on peut affirmer que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_T^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad \text{existe},$$

donc aussi $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$ car $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $[0,T]$, donc intégrable sur cet intervalle, et :

$$\int_0^A = \int_0^T + \int_T^A .$$

• Si $x \leq 0$, on a $e^{-xt} \geq 1$ pour tout $t \geq 0$, donc

$$\int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \geq \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \qquad (*)$$

mais les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ sont de même nature (puisque $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$), donc divergent.
On en déduit $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = +\infty$, et $(*)$ montre que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ diverge.

<u>Conclusion</u>: L'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

2) On a $F(x) - F(x') = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-x't}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \geq 0$ dès que $x < x'$, puisque :

$$x < x' \Rightarrow -xt > -x't \Rightarrow e^{-xt} > e^{-x't}.$$

3) On remarque que $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$ pour tout t, donc, pour $A \in \mathbb{R}_+$ fixé,

$$\int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \leq \int_0^A e^{-xt}\, dt = \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x}}_{\to 0 \quad (x \to +\infty)}$$

On coupe donc en deux ! Si $\varepsilon > 0$ est donné, l'intégrale $F(x)$ étant convergente, il existe $A > 0$ tel que

$$\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Alors :

$$F(x) = \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \leq \frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x} \right) = 0$, il existe $X \in \mathbb{R}$ tq :

$$x \geq X \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Compte tenu de (2) ;

$$\forall \varepsilon \quad \exists X \quad x \geq X \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$

4.a) Je vous laisse terminer Allison.

Soit la fonction : $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

a) En utilisant la règle d'Abel, montrer que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

b) Mq F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

c) En déduire $F(x)$, puis $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

d) En remplaçant t par $2t$ dans $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ puis en utilisant une intégration par parties, trouver la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$. Recommencer pour obtenir $\int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t}\,dt$.

Posons $f(x,t) = e^{-tx}\frac{\sin t}{t}$

a) Rappel : Lemme d'Abel. Soient $h(x,t)$ et $g(x,t)$ 2 appl. de $I \times [a,b[$ dans $\mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^b hg\,dt$ converge uniformément sur I ssi :

1) $\exists M \quad \forall \lambda < b \quad \sup_{x\in I}\left|\int_a^\lambda h(x,t)\,dt\right| \leq M$

2) L'application $x \mapsto g(x,t)$ converge uniformément vers 0 quand $t \to b$

3) $\forall x \quad t \mapsto g(x,t)$ décroît.

(Ramis IV.2.3)

Ici $g(t) = \sin t$ et $h(x,t) = \frac{e^{-tx}}{t}$ montrent que $\int_1^\infty f\,dt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\int_0^1 f\,dt$ converge aussi unif. en 0 (car $|f(x,t)| \leq \frac{|\sin t|}{t}$ et $\lim_{t\to 0}\frac{|\sin t|}{t} = 1$ donc $\int_0^1 \frac{|\sin t|}{t} < \infty$), on déduit que $\int_0^\infty f\,dt$ converge uniformément pour $x \in \mathbb{R}_+$.

$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ étant continue, le th. de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre assure la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

b) f admet la dérivée partielle continue $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx}\sin t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}\,dt$ est uniformément convergente pour $x \in [A, +\infty[$ car si $x \geq A$, $|-e^{-tx}\sin t| \leq e^{-At}$ et $\int_0^\infty e^{-At} = \frac{1}{A} < \infty$, de sorte

que l'on puisse appliquer le Th. général de dérivation sous le signe $\int$:

F sera dérivable sur $]A, +\infty[$ et $F'(x) = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin t \, dt$

C'est vrai pour tout $A > 0$, donc F sera dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

* Une double intégration par partie donne :

$$F'(x) = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin t \, dt = -1 + x \int_0^\infty e^{-tx} \cos t \, dt = -1 - x^2 F'(x)$$

d'où $\boxed{F'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*}$

c) Ainsi $F(x) = -\operatorname{Arctg} x + k$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

F étant continue sur $\mathbb{R}_+$, ce sera vrai pour $x \in \mathbb{R}_+$.

$|F(x)| \leqslant \int_0^\infty e^{-tx} dt = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ donc $k = \dfrac{\pi}{2}$.

Ccl : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} x}$ et $\boxed{F(0) = \int_0^\infty \dfrac{\sin t}{t} dt = \dfrac{\pi}{2}}$

d) Faisons $t = 2u$: $\dfrac{\pi}{2} = \int_0^\infty \dfrac{2 \sin u \cos u}{u} du = \left[\dfrac{\sin^2 u}{u}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \sin^2 u \left(-\dfrac{1}{u^2}\right) du$

d'où $\boxed{\int_0^\infty \dfrac{\sin^2 u}{u^2} du = \dfrac{\pi}{2}}$

* Recommençons : $\dfrac{\pi}{2} = \int_0^\infty \dfrac{\sin^2 2t}{4t^2} 2dt = \int_0^\infty \dfrac{2 \sin^2 t \cos^2 t}{t^2} dt = \int_0^\infty \dfrac{2 \sin^2 t (1 - \sin^2 t)}{t^2} dt$

$= 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} - 2 \int \dfrac{\sin^4 t}{t^2} dt \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \dfrac{\sin^4 t}{t^2} = \dfrac{\pi}{4}}$

a) Mq l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$ est convergente (où $n \in \mathbb{N}$)

b) Grâce à une intégration par parties, mq :

$$I_n = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{cotan}\, x \,.\, \sin 2nx \; dx$$

c) Mq si f est intégrable sur $[a,b]$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$

(On pourra utiliser des fonctions en escaliers qui approximent f ...)

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

---

a) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = n^2$ donc $x \mapsto \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}$ se prolonge par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et I_n convergera.

b) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = \left[-\text{cotan}\, x \,.\, \sin^2 nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\text{cotan} x \,.\, 2\sin nx \cos nx \,.\, n\,dx$

$$= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{cotan} x \,.\, \sin 2nx \,.\, dx$$

(est justifiable en prenant la borne ε au lieu de 0, puis en faisant tendre ε vers 0)

c) On trouve cette preuve dans Ramis III 6.4.1.3°/ ex p215.

- Si $f =$ cte, $\int_a^b \text{cte} \sin \lambda x\,dx = \text{cte}\, \frac{\cos \lambda a - \cos \lambda b}{\lambda} \to 0 \quad (\lambda \to +\infty)$

- Si f est en escalier, ce sera encore vrai par linéarité.

- Si f est intégrable, on l'approxime par une fct en escalier φ pour la semi-norme $\| \|_1$, ie :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \varphi \text{ en escalier} \quad \int_a^b |f - \varphi| \leq \varepsilon \qquad (*)$$

Alors $\left|\int_a^b f(x) \sin \lambda x\right| \leq \underbrace{\left|\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin \lambda x\right|}_{\leq \int_a^b |f-\varphi| \leq \varepsilon} + \underbrace{\int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x\,dx}_{\leq \varepsilon \text{ si } \lambda \text{ grand}}$

CQFD

(réf. Deug 1° année 92-93)

NB : Montrons (*).

1-sol : Avec cette déf. de la Riemann-intégrabilité : " f est R-intégrable sur $[a,b]$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ en escalier $|f - \varphi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon$ et $\int_a^b \psi_\varepsilon < \varepsilon$. " Alors $\int_a^b |f - \varphi_\varepsilon| \leq \varepsilon$.

2-sol : Avec cette déf. équivalente à la préc. pour des fcts de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: " f est R-intégrable sur $[a,b]$ ssi elle est bornée et si la borne sup. des sommes de Darboux inférieures est égale à la borne inf. des sommes de Darboux supérieures. La valeur commune de ces bornes s'appelle $\int_a^b f$ "

Notons $s(f,(a_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x) \, (a_{i+1} - a_i)$ la somme de Darboux inférieure relative à f et à la subdivision (a_i). On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (a_i) \qquad \int_a^b f - \varepsilon < s(f,(a_i)) \leq \int_a^b f$$

ie $$0 \leq \int_a^b f - s(f,(a_i)) < \varepsilon$$

et il suffit de voir que $s(f,(a_i)) = \int_a^b \varphi$ pour la fct en escalier φ valant $\inf_{[a_i, a_{i+1}]} f(x)$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \qquad 0 \leq \int_a^b (f - \varphi)(x) \, dx < \varepsilon$$

Comme $\varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$, on a bien $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon$.

CQFD

d) Comme $\operatorname{cotan} x \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$, on a l'idée de faire intervenir $\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}$ pour obtenir une fct intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{I_n}{n} = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right) \sin 2nx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} \, dx$$

* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} \, dx = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin t}{t} \, dt \longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad (n \to +\infty)$

* $\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right) = 0$ car $\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \sim \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

et $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x(1 + o(x)) - (x + o(x^2))}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)$

$x \mapsto \operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}$ se prolonge donc par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, sera donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et c) s'appliquera : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right) \sin 2nx = 0$

CQFD

NB : La règle de l'Hôpital permet d'avoir aussi :

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \lim_{0_+} \frac{1 - 1/\cos^2 x}{\tan x + x/[illegible]} = \lim_{0_+} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin 2x + x [illegible]} = \lim_{0_+} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1 + \cos 2x} = 0$$

Démontrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente (Ind. Montrer que $\lim \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$)

* $\lim_{x \to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$ montre que l'on peut prolonger la fct $\frac{\sin x}{x}$ par continuité en 0. Le seul problème est donc en $+\infty$. Une intégration par parties permet de conclure :

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{x}\cdot(-\cos x)\right]_1^A - \int_1^A -\frac{1}{x^2}(-\cos x)\,dx$$

$$= \frac{-\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

puisque $\lim_{A \to +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ et $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est absolument convergente

* $$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

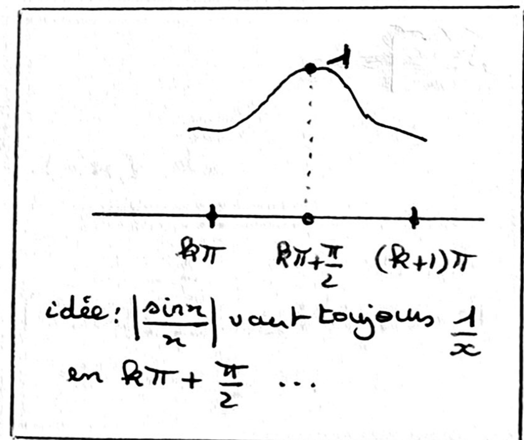
et
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx$$

$$\geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(-1)^k \sin x}{(k+1)\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi}\left[(-1)^{k+1}\cos x\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi}\left((-1)^{k+1} - (-1)^k\right)$$

$$= \frac{2}{(k+1)\pi}$$



De sorte que $\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$ où $\sum \frac{2}{(k+1)\pi}$ diverge.

L'intégrale proposée ne sera donc pas absolument convergente.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\, dx$

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

2) En déduire une expression de I_n en fonction de I_0.

I_n est bien convergente.

1) $$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\, dx = \int_0^1 x^{n-\frac{3}{4}} (1-x)^{-1/4}\, dx$$

$$= \underbrace{\left[x^{n-\frac{3}{4}} \frac{(1-x)^{3/4}}{-\frac{3}{4}} \right]_0^1}_{=0 \text{ si } n\geq 1} - \int_0^1 \left(n-\frac{3}{4}\right) x^{n-\frac{3}{4}-1} \frac{(1-x)^{3/4}}{-\frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \left(n-\frac{3}{4}\right)\frac{4}{3} \int_0^1 x^{(n-1)-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} (1-x)\, dx$$

$$= \left(\frac{4}{3}n-1\right) \int_0^1 \left(x^{(n-1)-\frac{3}{4}} - x^{n-\frac{3}{4}}\right) (1-x)^{-\frac{1}{4}}\, dx$$

$$I_n = \left(\frac{4}{3}n-1\right)(I_{n-1}-I_n)$$

$$\boxed{I_n = \frac{4n-3}{4n} I_{n-1}}$$ pour $n\geq 1$.

2) $$I_n = \frac{4n-3}{4n}\cdot\frac{4n-7}{4(n-1)}\cdots\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}\, I_0$$

$$\boxed{I_n = \frac{(4n-3).(4n-7)\ldots 5.1}{4^n.\,n!} I_0}$$

(réf. Deug 1année 92-93)

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $I_a = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$ b) $I_b = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3}\, dx$

c) $I_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}}$ pour $n > 1$ d) $I_d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \ln(\tan x)\, dx$

e) $I_e = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$ f) $I_f = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\mathrm{Arc}\cos(x+1)}$

g) $I_g = \int_{-1}^1 \frac{2^{\mathrm{Arc}\sin x}}{1-x}\, dx$ h) $I_h = \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx$

ⓐ I_a converge car :

au voisinage de 1, $\frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ et $\int_1^\alpha \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ converge.

au voisinage de 5, $\frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$ et $\int_\alpha^5 \frac{dx}{2\sqrt{5-x}}$ converge.

<u>NB</u> : Un chgt de variable permet de le vérifier. Ainsi, si $x-1=t$ et $1<\alpha<5$,

$$\int_1^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \int_0^\beta \frac{dt}{\sqrt{(4-t)t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{(4-t)t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}},\ \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ convergeant.}$$

<u>Calcul</u> :

$$I_a = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}} = \left[\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{x-3}{2}\right)\right]_1^5 = \mathrm{Arc}\sin 1 - \mathrm{Arc}\sin(-1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

ⓑ $I_b = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3}\, dx$

$\frac{\sin x}{x^3} \geq 0$ pour tout $x \in]0, \pi]$! Comme $\frac{\sin x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\int_0^\pi \frac{1}{x^2}\, dx$ diverge. Il en sera donc de même de I_b.

(réf. Deug 1-année 92-93)

ⓒ $I_c = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}}$

Le problème est en $\frac{\pi}{2}$. Posons $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$I_c = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dt}{(\sin t)^{1/n}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(\sin t)^{1/n}}$$

$\frac{1}{(\sin t)^{1/n}}$ reste positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{(\sin t)^{1/n}} \sim \frac{1}{t^{1/n}}$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^{1/n}} dt$ converge dès que $n > 1$. Donc I_c converge.

ⓓ $I_d = \int_0^{\pi/2} \cos x . \ln(\tan x)\, dx$

Notons que l'intégrant $f(x) \doteq \cos x \ln(\tan x)$ garde un signe constant au voisinage de 0 ou de $\frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet d'utiliser des équivalents.

En 0 : $\left.\begin{array}{l} \tan x \underset{0}{\sim} x \\ \lim_{x \to 0} x = 0 \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln \tan x \sim \ln x$ (Ramis III 5.1.3 Pro III p153) (voir aussi [T] Dével. limités) (voir lemme ci-dessous(*))

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \ln x$.

L'intégrale convergera en 0 car $\int_0^A \ln x\, dx = [x \ln x - x]_0^A$ converge.

En $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x) = - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\cos x) = 0$

La fct $f(x)$ sera donc prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale convergera en $\frac{\pi}{2}$.

NB : $I_d = -\ln 2$ AV

(*) Lemme : Si f et g sont strict. positives au vois. de x_0,
$\left.\begin{array}{l} f \sim g \\ \lim_{x \to x_0} g = l \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln f \sim \ln g$

preuve : $\ln g \neq 0$ pour x suffisamment voisin de x_0 (car $\lim_{x \to x_0} g = l \neq 1$), donc $\ln f \sim \ln g \Leftrightarrow \lim_{x_0} \frac{\ln f}{\ln g} = 1$

On a $\frac{\ln f}{\ln g} - 1 = \frac{\ln f - \ln g}{\ln g} = \frac{\ln f/g}{\ln g}$.

Cette exp. tend bien vers 0 car $f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$ et $\ln g$ tend soit vers $\ln l$, soit vers $\pm\infty$ CQFD

ⓔ $I_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ pose problème en 0.

$\left.\begin{array}{l}\sin x \sim x \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \neq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \ln(\sin x) \sim \ln x$

Comme $\int_0^A \ln x\,dx$ converge, __I_e sera convergente__.

__Calcul__ : $I_e = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos y)\,dy$ où $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Donc $2I_e = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$ (*)

Mais $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin X)\,dX$ où $X = 2x$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin X)\,dX}_{I_e} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin X)\,dX}_{= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\,du \,=\, I_e}$$

où $u = X - \frac{\pi}{2}$

$= I_e$

(*) entraine alors $\boxed{I_e = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$

ⓕ $I_f = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\text{Arccos}(x+1)}$

Arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ est décroissante.

Si $x \in [-1,0]$, alors $\text{Arccos}(x+1) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, d'où un pb en 0.

Posons $x = \cos t - 1$.

$I_f = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin t\,dt}{\text{Arccos}(\cos t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$ __qui converge puisque $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$__

(g) $I_g = \int_{-1}^{1} \frac{2^{\text{Arcsin}x}}{1-x}\,dx$

Arcsin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue. Le seul pb sera en 1.

$\frac{2^{\text{Arcsin}x}}{1-x} \underset{1}{\sim} \frac{2^{\pi/2}}{1-x}$ et $\int_{-1}^{1} \frac{2^{\pi/2}}{1-x}\,dx$ diverge, donc I_g divergera.

(h) $I_h = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ diverge puisque $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$ (et $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$) divergent

On considère la fct f définie sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante.
On définit la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ par :

$$A_n = f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n)$$

a) Mq $\quad A_n - f(a) \leq \int_a^{a+n} f(x)\,dx \leq A_{n-1}$

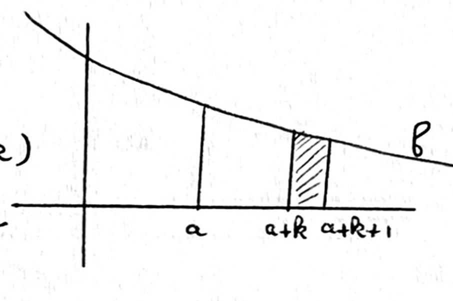
b) En déduire que la suite (A_n) est de m̂ nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (ie qu'elle converge ssi l'intégrale converge)

c) Mq $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

---

a)

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k+1)}_{A_n - f(a)} \leq \int_a^{a+n} f(x)\,dx = \sum \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)\,dx \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k)}_{A_{n-1}}$$



b)
* Si $\int_a^\infty f$ converge, $A_n - f(a) \leq \int_a^\infty f$ montre que A_n est majorée.
(A_n) étant croissante, elle convergera.

* Si (A_n) converge, notons $\lim A_n = A$. Comme (A_n) est une suite à termes positifs, $A = \operatorname{Sup} A_n$ et :

$$\forall n \quad \int_a^{a+n} f(x)\,dx \leq A_{n-1} \leq A$$

f étant positive, on aura aussi :

$$\forall x \in [a, +\infty[\qquad \int_a^x f(x)\,dx \leq \int_a^{a+E(x-a)+1} f(x)\,dx \leq A$$

L'application $x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$ étant croissante, majorée par A, admettra une limite quand $x \to +\infty$. Ie $\int_a^\infty f$ converge.

(réf. TD Deug 1re année 92-93)

c) * Si $\alpha \geq 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante et les a) et b) s'appliquent :

$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ sera de m̂ nature que $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, ie convergera

ssi $\alpha > 1$.

* Si $\alpha < 0$, on ne peut plus appliquer a) et b), mais on peut conclure directement :

$$\alpha < 0 \Rightarrow k^\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} > 1$$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq n$, et la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par

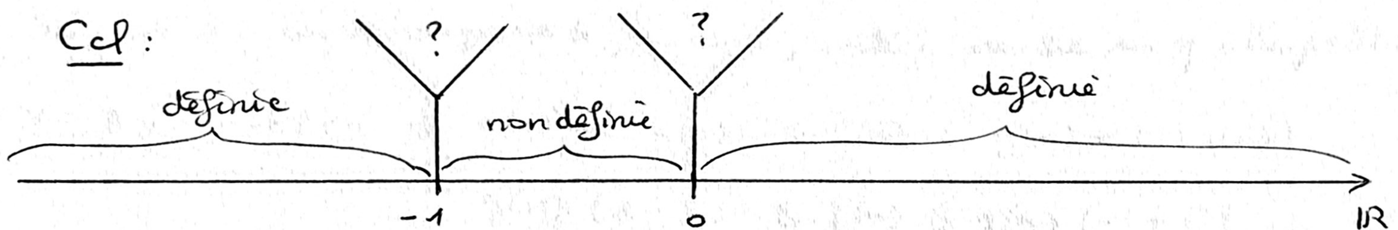
$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

• Si $x>0$, aucun problème car $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Il faut avoir $1+t^3>0 \iff t^3>-1 \iff t>-1$.

Supposons $x<0$. f ne sera pas définie par une intégrale de Riemann ssi $\frac{1}{x}<-1 \iff -1<x$

Ccl :



• En -1 et en 0, il faut voir si l'intégrale proposée n'est pas convergente. f serait alors définie par une intégrale généralisée.

* En -1 : $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge-t-elle ?

Oui, car $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\,\sqrt{1-t+t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{1+t}}$ et $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ converge puisque $\frac{1}{2}<1$.

* En 0 : $\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge puisque $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\frac{3}{2}>1$.

(réf. TD deug 1re année 93-94)

Soient f et g deux fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $b \in \overline{I}$.
On suppose que $f \underset{b}{\sim} g$ et que g garde un signe constant sur un voisinage de b.

Alors :

1) f garde un signe constant, le m̂ que celui de g, sur un voisinage de b

2) Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature

$f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \ |x-b| < \eta \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

Si g est ≥ 0 au voisinage de b, on aura, quitte à prendre un η plus petit :

$\forall \varepsilon \ \exists \eta \ |x-b| < \eta \Rightarrow g(x) - \varepsilon |g(x)| \leq f(x) \leq g(x) + \varepsilon |g(x)|$

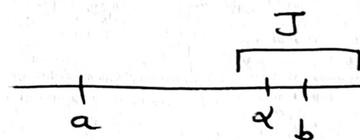
$$g(x) \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\text{positif si } \varepsilon < 1} \leq f(x) \leq g(x)(1+\varepsilon)$$

d'où 1).

Prouvons 2) : Fixons un intervalle J contenant b tel que f et g soient positives sur $I \cap J$, et $\alpha \in I \cap J$. Alors

$\int_a^b f$ est de m̂ nature que $\int_\alpha^b f$

$\int_a^b g$ " " $\int_\alpha^b g$



Ainsi, quitte à restreindre $[a, b[$, on peut supposer que f et g sont toutes deux positives sur $[a, b[$. Alors :

$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad |x-b| < \eta \Rightarrow \quad g(x)(1-\varepsilon) \leq f(x) \leq g(x)(1+\varepsilon) \quad (*)$

Soit c tel que $|c-b| < \eta$. (*) entraine :

$$(1-\varepsilon)\int_c^A g(x) \leq \int_c^A f(x) \leq (1+\varepsilon)\int_c^A g(x)$$

dès que A vérifie $|A-b|<\eta$

D'où 2).

(En effet, on fixera ε tel que $1-\varepsilon>0$. Si $\int_c^b g$ converge, pour tout A $0 \leq \int_c^A f(x) \leq (1+\varepsilon)\int_c^A g(x)$. La fct $A \mapsto \int_c^A f(x)$ est croissante (car $f \geq 0$) et majorée par $(1+\varepsilon)\int_c^b g(x)$, donc converge dans $\mathbb{R}$ d'après le Th. de la limite monotone. L'inégalité $(1-\varepsilon)\int_c^A g(x) \leq \int_c^A f(x)$ permet de prouver de la même façon que la convergence de $\int_c^A f$ entraîne celle de $\int_c^A g$)

On considère la fct réelle φ définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$$

a) Déterminer l'intervalle I de $\mathbb{R}$, ensemble de définition de la fonction φ.

b) Mq $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\, dt$

c) Mq $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n}\, dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$, puis le développement limité de $\varphi(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

---

a) Si $x>0$, $e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t}\right)$ donc $\frac{e^{-xt}}{1+t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale converge.

Si $x \leq 0$, $\int_0^A \frac{1}{1+t}\, dt \leq \int_0^A \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$. Comme $\frac{1}{1+t} \sim \frac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t}$ diverge et il en sera de m̂ de $\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$.

Ainsi $\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$

b) Par intégration par parties :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt = \left[\frac{1}{1+t}\cdot\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{(1+t)^2}\cdot\frac{e^{-xt}}{-x}\, dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\, dt$$

c) $$0 \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n}\, dt < \int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$ d'où le résultat.

d) D'après b), $\varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = -\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\, dt$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Cela prouve que $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

…/…

(réf extrait de l'examen de DEUG 1re année de juin 1991 ; TD Deug 92-93 (adapté) 93-94)

* Par intégration par parties, on a aussi :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n}\,dt = \left[\frac{1}{(1+t)^n}\cdot\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{n}{(1+t)^{n+1}}\cdot\frac{e^{-xt}}{-x}\,dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{n}{x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

Il suffit de remplacer dans la formule du b) pour obtenir :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^3}\,dt$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$ (vu le c)).

Étudier la nature des intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \frac{dt}{t^n-1}$ 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)^2}$ 3) $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\, x}{x^2}\, dx$ 4) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n} x\, dx$

5) $\int_0^a x^\alpha \ln x\, dx$ $a>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^\alpha \ln(\sin x)\, dx$

6) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\, dx$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a>1$ (Intégrale de Bertrand)

1) $f(t) \doteq \frac{1}{t^n-1} = \frac{1}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\dots+1)}$ donc $\lim_{t\to 1_+} \frac{f(t)}{\frac{1}{t-1}} = n$ et

$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{n}{t-1}$. $\frac{1}{t^n-1}$ garde un signe constant au vois. de 1_+, de sorte que

$I \doteq \int_1^2 \frac{dt}{t^n-1}$ soit de même nature que $\int_1^2 \frac{n}{t-1}\, dt$, qui diverge.

2) $\frac{1}{x(1+x)^2} \sim \frac{1}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge. Il en sera de m̂ de I.

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\text{Arctan}\, x < \frac{\pi}{2}$ donc si $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{\text{Arctan}\, x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2}$.

La convergence de $\int^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\, dx$ entraînera alors celle de I.

NB : on peut aussi remarquer que $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$, donc $\text{Arctan}\, x \sim \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\text{Arctan}\, x}{x^2} \sim \frac{\pi}{2x^2}$ (...)

4) L'intégrale I est absolument convergente car

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin^{2n} x|\, dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

5) C'est une intégrale de Bertrand. Problème en $x=0$.

* Ce qui est "évident" : Si $\alpha>0$, $\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \ln x = 0$, $x \mapsto x^\alpha \ln x$ est prolongeable par continuité sur $[0, a]$ donc intégrable sur cet intervalle.

* Pour aller plus loin : On compare $f(x) \doteq x^\alpha \ln x$ à $\frac{1}{x^\gamma}$

(réf. deug 1re année UAG 93-94)

$$\lim_{x \to 0_+} x^\gamma f(x) = \lim_{x \to 0_+} x^{\gamma+\alpha} \ln x = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma+\alpha>0 \\ -\infty & \text{si } \gamma+\alpha<0 \end{cases}$$

• Si $\gamma+\alpha>0$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\gamma}$ pour x proche de 0_+.

On a $\gamma > -\alpha$. Si $-\alpha<1$, on pourra choisir γ tq $-\alpha<\gamma<1$ de sorte que $\int_0^a \frac{1}{x^\gamma}\,dx$ converge. Dans ce cas $I \doteq \int_0^a x^\alpha \ln x \, dx$ convergera absolument.

• Si $\gamma+\alpha<0$, $|f(x)| > \frac{1}{x^\gamma}$ pour x voisin de 0, et $f(x)$ reste négatif.

$\int_0^a \frac{1}{x^\gamma}$ diverge ssi $\gamma>1$.

Choisissons donc γ tq $1<\gamma<-\alpha$, ce qui est possible ssi $1<-\alpha$, ie $-1>\alpha$. Dans ce cas, I divergera.

Conclusion : $I = \int_0^a x^\alpha \ln x \, dx$ $\begin{cases} \text{converge si } \alpha>-1 \\ \text{diverge si } \alpha<-1 \end{cases}$

• Si $\alpha=-1$, $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^a \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_\varepsilon^a$

et $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\ln^2 \varepsilon = +\infty$ prouve que $\lim_{\varepsilon \to 0_+} I_\varepsilon = -\infty$, et que I diverge.

Application : étude de $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \ln(\sin x)\, dx$

* 1ère méthode : chgt de variable

$u = \sin x \qquad x = \operatorname{Arcsin} u \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$

L'intégrale devient :

$\int_0^1 u^\alpha . \ln u . \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ de même nature que $\int_0^1 u^\alpha \ln u \, du$

puisque $\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1$.

On applique ce qui précède : l'intégrale converge ssi $\alpha > -1$. CQFD

* 2ème méthode : on cherche un équivalent de l'intégrant à l'aide des D.L.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$\ln(\sin x) = \ln x + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)$

or $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, donc :

$\ln(\sin x) = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \Rightarrow \ln(\sin x) \sim \ln x$ (1)

(NB : on aurait aussi pu utiliser le résultat suivant : " Si $f > 0$, $g > 0$ et $f \sim g$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, et s'il existe M tq $|\ln g(x)| \geq M > 0$ pour x voisin de x_0, alors $\ln f \sim \ln g$ "
Ici : $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{x \to 0_+} \ln x = -\infty$ donc $\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x$.)

$\sin^\alpha x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^\alpha = x^\alpha \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^\alpha \sim x^\alpha$ (2)

puisque $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$

(1) et (2) entraînent $\sin^\alpha x \ln(\sin x) \sim x^\alpha \ln x$ et $\int_0^a x^\alpha \ln x \, dx$ a été étudiée précédemment.

CQFD

6) Intégrale de Bertrand. Méthode analogue à celle du 5), ie comparaison à $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$.

([T] Intégration)

Règle d'Abel pour les intégrales généralisées : démonstration avec des hypothèses renforcées(*)

On rappelle le critère de Cauchy pour les intégrales :

"Soit h une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. Alors $\int_a^b h(t)\,dt$ converge ssi

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a,b[\quad \forall \lambda, \mu$ tels que $c \leq \lambda \leq \mu < b \quad \left| \int_\lambda^\mu h(t)\,dt \right| < \varepsilon$"

a) Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante et tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On suppose en outre que f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$

Soit $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, et telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall \lambda, \mu \in [a,+\infty[\qquad \left| \int_\lambda^\mu g(t)\,dt \right| \leq A$$

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ est convergente en utilisant le critère de Cauchy.

b) Application : étudier la convergence de $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$

---

a) Par intégration par parties

$$\int_\lambda^\mu f(t)\,g(t)\,dt = [f(t)\,G(t)]_\lambda^\mu - \int_\lambda^\mu f'(t)\,G(t)\,dt$$

où $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, donc :

$$\left| \int_\lambda^\mu f(t)\,g(t)\,dt \right| \leq f(\mu)\,|G(\mu)| + f(\lambda)\,|G(\lambda)| + \int_\lambda^\mu -f'(t)\,|G(t)|\,dt$$

puisque f est positive (car décroissante et tendant vers 0) et que $f'(t) \leq 0$ pour tout t (car f décroît)

(*) La preuve sous des hypothèses minimale se trouve en Ramis III.7.2.6

(réf. TD deug 1re année 92-93)

Par hypothèse $|G(x)| \leq A$ pour tout $x \in [a, +\infty[$, donc :

$$\left|\int_\lambda^\mu f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq A\,(f(\mu) + f(\lambda)) - A\int_\lambda^\mu f'(t)\,dt$$
$$\leq 2\,A\,f(\lambda)$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il existe $c > a$ tel que $x > c \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2A}$

et donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \qquad c \leq \lambda < \mu \Rightarrow \left|\int_\lambda^\mu f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$.

Le critère de Cauchy est vérifié.

b) $\left|\int_\lambda^\mu \sin t\,dt\right| \leq \int_0^\pi \sin t\,dt = 2$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto \sin t$ est continue .

$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ ne pose pas de pb en 0 car $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ assure un prolongement de $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ par continuité en 0. On discute alors la convergence de $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est C^∞, décroissante (sur $[1, +\infty[$) et tend vers 0 quand $t \to +\infty$, ce qui permet d'appliquer la règle d'Abel du a) .

<u>Ccl</u> : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente

<u>2-solution</u> : par intég. p.p.

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{t}}(-\cos t)\right]_1^\infty - \int_1^\infty -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^{3/2}}(-\cos t)\,dt$$
$$= \cos 1 - \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt}_{\text{intégrale absolument convergente car } \frac{3}{2} > 1}$$

a) Mq les intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2}\,dt$ et $I_2 = \int_1^\infty \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2}\,dt$

sont convergentes

b) Calculer $I = I_1 + I_2$. On pourra utiliser le chgt de var. $u = \frac{1}{t}$

a) En 0 : $\lim_{t \to 0} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} = 0$ donc la fonction à intégrer se prolonge par continuité sur tout $[0,1]$, et I_1 converge.

En 1 : pas de pb, la fct y étant continue.

En $+\infty$:

$$\frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^5} \quad \text{et} \quad \frac{\ln t}{t^5} = o\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^4}\,dt$ converge, I_2 aussi.

b) $$I_1 = \int_\infty^1 \frac{-\ln u}{u^3\left(1+\frac{1}{u^4}\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_1^\infty \frac{u^3 \ln u}{(1+u^4)^2}\,du = -I_2$$

montre que $I = 0$.

(1er exercice (sur 2pts/11pts) de l'examen de juin 93, deug A 1re année UJ M12)

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{8}$

$x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ est la décomposition en produit de poly. irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ de x^4+4.

Décomposons $\dfrac{1}{x^4+4}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

↑ $1+i$ est racine du dénominateur (sous $\frac{ax+b}{x^2-2x+2}$)

↑ $-1-i$ est racine du dénominateur (sous $\frac{cx+d}{x^2+2x+2}$)

d'où
$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)^2+2(1+i)+2} = a(1+i)+b \\[2ex] \dfrac{1}{(1+i)^2-2(-1-i)+2} = c(-1-i)+d \end{cases}$$

On résout ce système facilement pour trouver :

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^4+4} = \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2} + \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}$$

$$= -\frac{1}{16}\,\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}{x^2-2x+2} + \frac{1}{16}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}{x^2+2x+2}$$

D'où

$$\int_0^A f(x)\,dx = -\frac{1}{16}\Big[\ln|x^2-2x+2|\Big]_0^A + \frac{1}{16}\Big[\ln|x^2+2x+2|\Big]_0^A + \frac{1}{8}\int_0^A \frac{dx}{x^2-2x+2}$$
$$+ \frac{1}{8}\int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

(réf. Deug 1-année 92-93)

$$\int_0^A f(x)\,dx = \frac{1}{16}\underbrace{\ln\left|\frac{A^2+2A+2}{A^2-2A+2}\right|}_{\to 0\ (A\to+\infty)} + \frac{1}{8}\int_0^A \frac{dx}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{8}\int_0^A \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

Finalement :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx = \frac{1}{8}\lim_{A\to+\infty}\left(\Big[\operatorname{Arctan}(x-1)\Big]_0^A + \Big[\operatorname{Arctan}(x+1)\Big]_0^A\right)$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{A\to+\infty}\Big(\operatorname{Arctan}(A-1) + \operatorname{Arctan}(A+1)\Big)$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$, admettant une dérivée première et une dérivée seconde continue, et on suppose que

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty [f''(x)]^2\,dx \quad \text{convergent.}$$

En utilisant une intégration par parties et le critère de Cauchy pour les intégrales, montrer que $\int_0^\infty [f'(x)]^2\,dx$ converge.

* Par intégration par parties, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_\lambda^\mu f'^2 = [f.f']_\lambda^\mu - \int_\lambda^\mu f.f'' \qquad (1)$$

Rappel : Critère de Cauchy pour les intégrales.

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0 \ \lambda, \mu > A \Rightarrow \left| \int_\lambda^\mu f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon$

Ce n'est qu'une version du Critère de Cauchy pour les fonctions !

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraine :

$$\left(\int_\lambda^\mu f f'' \right)^2 \leq \left(\int_\lambda^\mu f^2 \right) \left(\int_\lambda^\mu f''^2 \right) \qquad (2)$$

et le second membre de (2) peut être rendu $\leq \varepsilon$ dès que λ, μ sont suffisamment grands puisque $\int_0^\infty f^2$ et $\int_0^\infty f''^2$ convergent, par hypothèse.

L'intégrale $\int_0^\infty f f''$ est donc convergente.

(1) s'écrit encore :

$$\int_0^y f'^2 = [f.f']_0^y - \int_0^y f.f'' \qquad (1')$$

si bien que $\int_0^\infty f'^2$ sera convergente si l'on montre que $\lim_{y \to +\infty} f(y).f'(y)$ existe dans $\mathbb{R}$ ...

(réf. Deug 1re année 92-93)

* Montrons que $\lim_{y\to+\infty} f(y)f'(y)$ existe dans $\mathbb{R}$.

$y \longmapsto \int_0^y f'^2$ est une fct positive croissante donc converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou vers $+\infty$, quand $y \to +\infty$ (Th. de la limite monotone). L'égalité :

$$\int_0^y f'^2 = [ff']_0^y - \int_0^y ff'' \qquad (1')$$

et la convergence de $\int_0^\infty f \cdot f''$ montre que :

- soit $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y).f'(y) \in \mathbb{R}$

- soit $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y).f'(y) = +\infty$

Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)f'(y) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^y f(x)f'(x)\,dx = +\infty$ et $\int_0^y f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f^2(y) - f^2(0)\right)$

montre que $\lim\limits_{y\to+\infty} f^2(y) = +\infty$, ce qui la convergence de $\int_0^\infty f^2$.

CQFD

On considère la fonction $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition, et étudier les variations de f.

c) Montrer que $\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$

d) Mq $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} - \frac{1}{\ln t} \, dt = \ln 2 - f(x)$, et en déduire que $\lim_{x \to 1} f(x) = \ln 2$

e) Quelle est la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx$

a) f est définie si $x > 0$ et si $\ln t \neq 0$ pour tout t entre x et x^2. C'est assuré ssi $x \neq 1$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

b) $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ donc f sera dérivable sur cet ensemble et $f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$

Le tableau de variations de f s'en déduit :

x	0		1	
f'	‖	+	‖	+
f	‖	↗	‖	↗

c) Si $0 < x < A < 1$, $|f(x)| \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{|\ln t|} \leq (x - x^2) \cdot \frac{1}{|\ln A|}$

donc $\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$

2e solution : Si H désigne une primitive de $f(t) = \frac{1}{\ln t}$ sur $]0,1[$, on a par le Th. AF :

$$|f(x)| = |H(x^2) - H(x)| \leq \sup_{t \in]x^2; x[} |f(t)| \, |x^2 - x| = \frac{x - x^2}{|\ln x|} \to 0 \quad (x \to 0_+)$$

(réf. Deug 1re année 92-93, et examen de juin en 91) (autre version de cet exercice en [I] Intégration, T29

d) $$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} - \frac{1}{\ln t}\, dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt - \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

$$= \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} - f(x)$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1-t}{t\ln t}\, dt = \ln 2 - f(x)$$

Comme $t \mapsto \frac{1-t}{t\ln t}$ peut être prolongée en une fct continue g sur un voisinage de 1 (car $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$ entraine $\frac{1-t}{t\ln t} \underset{1}{\sim} \frac{-1}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to 1} \frac{1-t}{t\ln t} = -1$), on peut écrire :

$$\int_x^{x^2} g(t)\, dt = \ln 2 - f(x) \qquad (*)$$

pour x voisin de 1.

g étant continue sur $]0,+\infty[$, l'application $x \overset{G}{\mapsto} \int_a^x g(t)\, dt$ sera continue sur $]0,+\infty[$, donc $\lim\limits_{x\to 1} \int_a^x g(t)\, dt = \int_a^1 g(t)\, dt$,

et donc : $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} g = \lim\limits_{x\to 1}\left(\int_a^{x^2} g - \int_a^x g\right) = 0$

En passant à la limite pour x tendant vers 1 dans $(*)$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2}$$

e) Soient $0 < \varepsilon < A < 1$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \int_\varepsilon^A f'(x)\, dx = f(A) - f(\varepsilon)$$

Comme $\lim\limits_{A\to 1} f(A) = \ln 2$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} f(\varepsilon) = 0$, on déduit que $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx$ converge et que $\boxed{\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2}$

Si n est un réel, démontrer que $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$ converge ssi $n>0$

Il s'agit d'une intégrale d'une fonction positive.

* La convergence pour $x \to +\infty$ ne pose pas de problème car

$$x^{n-1} e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

En effet $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n+1} e^{-x} = 0$

Il suffit alors de constater que $x^{n-1} e^{-x}$ reste positive si $x>0$ et que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

* En 0, on a $x^{n-1} e^{-x} \sim x^{n-1}$ et l'on sait que $\int_0^1 x^{n-1}\,dx$ converge ssi $1-n<1$, ie $n>0$.

Finalement $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$ converge ssi $n>0$.

(ref. Deug A 1re année 92-93)